EXERCICE N°1 : 30' 6 points

Soit (U_n) une suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1} \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°) Soient (V_n) et (W_n) deux suites définies sur IN par $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$ et $W_n = \ln(V_n)$.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $W_0 = \ln(2)$.

b) Déterminer le terme général de (W_n) et vérifier que pour tout $n \in IN$, $W_n = \ln\left(2^{2^n}\right)$.

c) Montrer alors que pour tout $n \in IN$, on a $U_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$.

d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N°2 : 30' 6 points

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout $n \in IN^*$ $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Etablir pour tout $n \in IN^*$ la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En remarquant que $x.(\ln x)^n = x^2 \dfrac{(\ln x)^n}{x}$

Montrer que $\dfrac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2 \dfrac{(\ln x)^n}{x}$ pour tout $x \in [1, e]$.

b) En déduire que : $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn